Einführung in die Astronomie I

Teil 7

Peter Hauschildt
`yeti@hs.uni-hamburg.de`

Hamburger Sternwarte
Gojenbergsweg 112
21029 Hamburg

20. Juni 2017

Übersicht Teil 7

- Sternaufbau
    - Grundgleichungen
    - Nukleare Reaktionen in Sternen
    - Sternmodelle
- Sternentwicklung
    - Zeitskalen
    - Entstehung
    - Hauptreihe
    - Endstadien

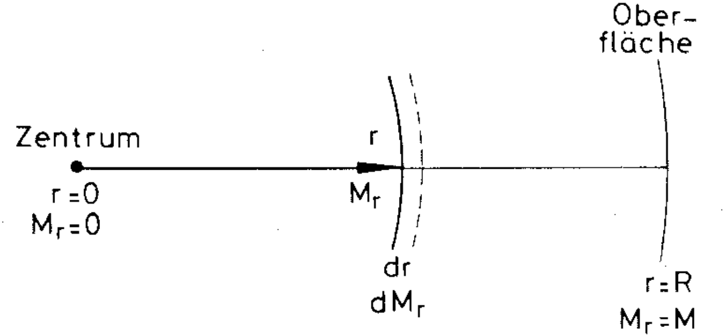
Sternaufbau

- Sternatmosphäre
  - $\approx 10^{-3}$ Sternradius
  - $\approx 10^{-11}$ Sternmasse
- Rest: *Sterninneres*
- Energieerzeugung
- Entwicklung

Grundgleichungen

- sphärischer, nicht rotierender Stern
- keine B-Felder, Gezeitenkräfte etc...
- $\rightarrow$ Stern ist sphärisch symmetrisch
- $\rightarrow$ einzige Variable r
- Zeitentwicklung $\rightarrow$ s.u.
- Materie ist gasförmig
- Kräfte:
    - Gravitation
    - Druck

Massenverteilung



- M_r: Masse innerhalb Kugel r

Massenverteilung

- Massenerhaltung bei Dichte $\rho \rightarrow$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

- $\rho(r)$ hängt auch von T und P ab
- Zusammensetzung hat auch wichtigen Einfluß

Hydrostatisches Gleichgewicht

- Früher Abgeleitet:
$$\frac{dP}{dr} = -g\rho$$
- Hier
$$g = \frac{GM_r}{r^2}$$
- also
$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2}\rho$$

Energiequellen

- chemische Energie
  - 10^{-19} J pro Atom
  - $L = 3.9 \times 10^{26}$ W oder [J/s]
  - $\rightarrow 3.9 \times 10^{45}$ Reaktionen/s benötigt
  - Sonne enthält ca. 10^{57} Atome
  - $\rightarrow$ reicht für 3×10^{11} s $\rightarrow$ 10.000 Jahre

Energiequellen

- thermische Energie
    - ideales einatomiges Gas
    - →

$$E_T = \int_0^M \frac{3k}{2\mu m_{\mathrm{H}}} T dM_r$$

    - μ Mittleres Molekulargewicht
    - Sonne → $E_T \approx 5 \times 10^{41}$ J
    - reicht ca. 10^7 Jahre

Energiequellen

- Kelvin-Helmholtz Kontraktion
    - Potentielle Energie (Gravitation)
    - → Erwärmen durch Zusammenziehen
    - → Abstrahlung
    - reicht für ca. 25×10^6 Jahre

Energiequellen !!

- Fusion H → He
  - $E = mc^2$
  - 1 kg H wird zu 0.993 kg He
  - 7 g Materie werden in Energie umgewandelt
  - das entspricht dem Heizwert von 20.000 Tonnen Kohle
  - 'verbrennt' 4 Millionen Tonnen / s
  - reicht Sonne für $10^{10} - 10^{11}$ Jahre…

Energieerhaltung

- erzeugte Energie muss abgeführt werden
- L_r: lokale Leuchtkraft an r
- ϵ: lokal erzeugte Energie/Massen/s
- Energiebilanz:

$$L_r = \int_0^{M_r} \epsilon \, dM_r = \int_0^r \epsilon 4\pi r^2 \rho \, dr$$

- differenzieren nach r →

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon$$

Energietransport

- Strahlung
- Konvektion
- Wärmeleitung

Strahlung

- optische Tiefe *sehr* groß
- Photonen diffundieren nach aussen
- Diffusionsgleichung

$$j = -\frac{1}{3} v l \frac{dn}{dr}$$

- $j \rightarrow F = L_r/(4\pi r^2)$ Diffusionsfluß (Strahlungsstrom)
- $n \rightarrow u = (4\sigma/c)T^4$ Teilchendichte (Strahlungsdichte)
- $v \rightarrow c$
- $l = 1/\chi$ mittl. freie Weglänge
- $dn/dr \rightarrow d((4\sigma/c)T^4)/dr$ Konzentrationsgradient

Strahlung

- damit

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{64\pi}\frac{\chi}{\sigma}\frac{L_r}{r^2 T^3}$$

- NB: Weigert/Wendker verwendet $\chi = \kappa\rho$
- σ ist hier die Stefan-Boltzmann Konstante

Konvektion

- Materieaustausch heisse-kühle Schichten
- Ideal: adiabatischer Prozess für einatomiges Gas:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{2}{5}\frac{T}{P}\frac{dP}{dr}$$

- erfüllt im Zentrum, falls konvektiv

Konvektion

- Heisse 'bubbles' steigen auf
- Kühle sinken ab
- → Energietransport nach aussen
- nahezu adiabatischer Prozess
- funktioniert wenn

  $$|dT/dr|_{\mathrm{rad}} > |dT/dr|_{\mathrm{ad}}$$

  (der kleinere T-gradient gewinnt!)
- mixing-length 'theory'

Wärmeleitung

- Nur in Sonderfällen wichtig
- z.B. entartetes Elektronengas (WDs)
- sieht aus wie Diffusionsgleichung
- $\rightarrow$ formales χ_{WL}

Gesamtsystem !!

- Massenerhaltung

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

- Hydrostatik

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2}\rho$$

Gesamtsystem !!

- Energieerhaltung

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon$$

- Energietransport (Diffusion)

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{64\pi} \frac{\chi}{\sigma} \frac{L_r}{r^2 T^3}$$

- 4 Gleichungen für 4 Unbekannte!

Randbedingungen !!

- $r = 0$
    - $M_r = 0$
    - $L_r = 0$
- $r = R$
    - $T \to 0$
    - $P \to 0$
- gemischtes Randwertproblem
- Parameter: M, Zusammensetzung
- Lösung per Computer

Zustandsgleichung !!

- $\rho = \rho(T, P, \mathrm{Zusammensetzung})$
- muss bekannt sein!
- Sterne → Gas (normalerweise)
- Zentrum der Sonne $T = 15 \times 10^6\,\mathrm{K}$, $\rho = 100\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$
- hohe Drücke → vollständige Ionisation
- aber noch ideales Gas! →

$$n = \frac{1}{k}\frac{P_g}{T}$$

$$\rho = \frac{\mu m_\mathrm{u}}{k}\frac{P_g}{T}$$

Zustandsgleichung (EOS) !!

- μ (dimensionsloses) mittl. Molekulargewicht
- teilweise Ionisation → zählen →

$$\mu = \frac{\text{Zahl der Nukleonen pro cm}^3}{\text{Zahl aller Teilchen pro cm}^3}$$

- vollst. Ionisation, 1 Element →

$$\mu = \frac{A}{Z+1}!!$$

- H → 0.5
- He → 1.433
- schwere Elemente $\mu \approx 2$

Strahlungsdruck

- muss in P berücksichtigt werden!
- im TE
$$P_r = \frac{4\sigma}{3c} T^4$$
- $P = P_g + P_r$

Entartung !!

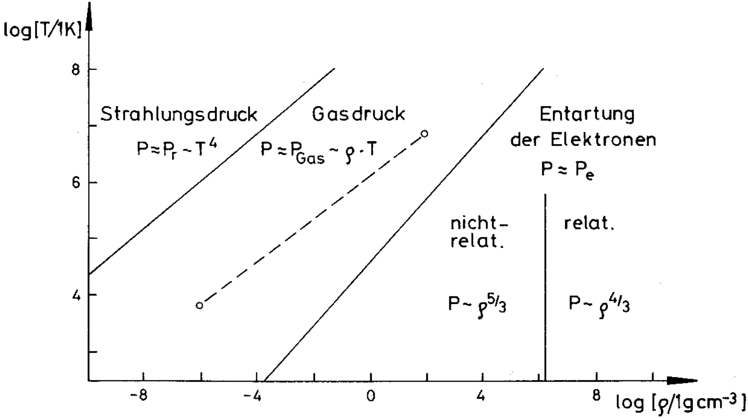
- Fermionen (Teilchen mit $(n/2)\hbar$ Spin) folgen Pauli-Prinzip
- extremer Druck →
- Phasenraum der Elektronen 'voll'
- → EOS nicht mehr T abhängig!
- kann enorme Drücke liefern

$$P \propto m_e n_e^{5/3}$$

$$P \propto m_e \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3}$$

- Beispiel: Weißer Zwerg

Zustandsgleichung (EOS)



nuclear reactions

- overview about most important nuclear reactions in stars
- historically:
    - thermonuclear reactions in stars: 1929, Atkinson & Houtermans (after Gamov's tunnel effect)
    - 1938: Bethe & Critchfield discover the pp-chain, Bethe & Weizsäcker discover the CNO cycle
    - 1952: Salpeter: He burning
    - 1958: Burbidge^2, Fowler, Hoyle: Synthesis of elements in stars

nuclear reactions

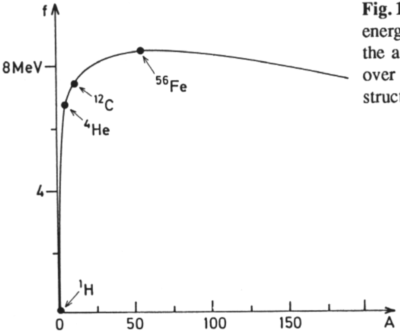


Fig. 18.1. A smoothed run of the fractional binding energy per nucleon, $f = E_B/A$, for stable nuclei, over the atomic mass number A. The curve is smoothed over the wiggles which are due to the nuclear shell structure and pair effects.

nuclear reactions

- fusion requires that the particles are close to each other so that nuclear forces can operate
- "nuclear radius"

$$r_0 \approx 1.44 \times 10^{-13} A^{1/3}$$

- for $d < r_0$ nuclear forces dominate!
- Coulomb forces:

$$E_{\mathrm{Coul}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

nuclear reactions

- height of the *Coulomb barrier*:

$$E_{\mathrm{Coul}}(r_0) \approx Z_1 Z_2 \,\mathrm{MeV}$$

- particle with kinetic energy E_1 can reach a distance of $E_1 = E_{\mathrm{Coul}}(r_1)$ from the nucleus
- kinetic energy from thermal motions (*thermonuclear* reactions)
- stars generally do not explode through thermonuclear reactions
  $\rightarrow$ average energy $E_{\mathrm{th}} < E_{\mathrm{Coul}}(r_0)$

nuclear reactions

- $T \approx 10^7\,\mathsf{K} \rightarrow kT \approx 10^3\,\mathrm{eV}$
  $\rightarrow$ E_{th} too small by about a factor of 1000!
- classical high-end tail of the MB distribution
  $\rightarrow$ number of particles drop by $\exp(-1000) \approx 10^{-434}$
  $\rightarrow$ "only" 10^{57} protons in the Sun
  $\rightarrow$ *no reactions!* (even for the 10^{80} protons in the universe)

nuclear reactions !!

- solution: *tunnel-effect* (G. Gamov)
- tunneling probability:

$$P_0 = p_0 E^{-1/2} \exp(-2\pi\eta),\ \eta = \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar E^{1/2}}$$

  where m is the reduced mass and p_0 depends only on the properties of the 2 colliding nuclei
- for $Z_1 Z_2 = 1$ and $T = 10^7\,\mathrm{K} \rightarrow P_0 \approx 10^{-20}$ for particles with average kinetic energies (rising steeply towards higher energies!)
- → chance of reactions enormously increased!

nuclear reactions

- higher Z will require higher temperatures for reactions to take place
  $\rightarrow$ well separated phases of nuclear burning!

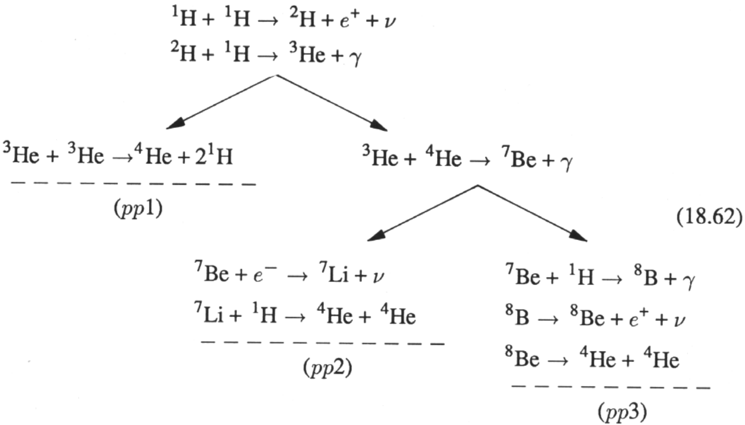
nuclear reactions

- Typical parametrization:

$$\epsilon \propto T^{\nu}$$

- but $\nu = \nu(T, Z_1, Z_2)$
- Typical abbreviations: $T_n = \frac{T}{10^n \mathrm{K}}$

proton-proton chain !!



$$^{1}\mathrm{H} + {}^{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{2}\mathrm{H} + e^{+} + \nu$$

$$^{2}\mathrm{H} + {}^{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{3}\mathrm{He} + \gamma$$

$$^{3}\mathrm{He} + {}^{3}\mathrm{He} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + 2\,{}^{1}\mathrm{H}$$

(*pp*1)

$$^{3}\mathrm{He} + {}^{4}\mathrm{He} \rightarrow {}^{7}\mathrm{Be} + \gamma \qquad (18.62)$$

$$^{7}\mathrm{Be} + e^{-} \rightarrow {}^{7}\mathrm{Li} + \nu$$

$$^{7}\mathrm{Li} + {}^{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + {}^{4}\mathrm{He}$$

(*pp*2)

$$^{7}\mathrm{Be} + {}^{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{8}\mathrm{B} + \gamma$$

$$^{8}\mathrm{B} \rightarrow {}^{8}\mathrm{Be} + e^{+} + \nu$$

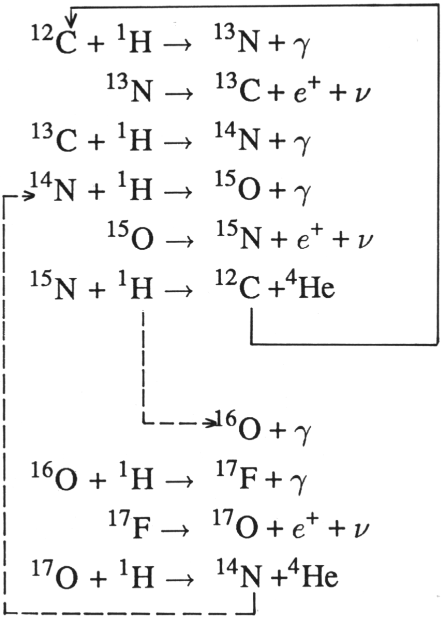
$$^{8}\mathrm{Be} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + {}^{4}\mathrm{He}$$

(*pp*3)

proton-proton chain

- pp1: goes through 2 ^{3}He producing chains
- other 2 branches use existing ^{4}He as catalyst
- branching exists because ^{7}Be can react with e^- or protons
- released energies are slightly different depending on the channel taken
  1. pp1: $26.2\,\mathrm{MeV}$
  2. pp2: $25.67\,\mathrm{MeV}$
  3. pp3: $19.2\,\mathrm{MeV}$
- relative frequency of branches depends on abundances, T and ρ

CNO cycle !!



$$^{12}C + {}^{1}H \rightarrow {}^{13}N + \gamma$$

$$^{13}N \rightarrow {}^{13}C + e^{+} + \nu$$

$$^{13}C + {}^{1}H \rightarrow {}^{14}N + \gamma$$

$$^{14}N + {}^{1}H \rightarrow {}^{15}O + \gamma$$

$$^{15}O \rightarrow {}^{15}N + e^{+} + \nu$$

$$^{15}N + {}^{1}H \rightarrow {}^{12}C + {}^{4}He$$

$$^{16}O + \gamma$$

$$^{16}O + {}^{1}H \rightarrow {}^{17}F + \gamma$$

$$^{17}F \rightarrow {}^{17}O + e^{+} + \nu$$

$$^{17}O + {}^{1}H \rightarrow {}^{14}N + {}^{4}He$$

CNO cycle

- main cycle (upper) completes when ^{12}C is reproduced in $^{15}\mathrm{N} + {}^{1}\mathrm{H}$
- this can branch through ^{16}O (must be pre-existing) which is 10^{-4} times as likely
- transforms ^{16}O to ^{14}N!
- β^{+} decays lifetimes $10^{2} \ldots 10^{3}\,\mathrm{s}$
- low $T \rightarrow$ detailed calculations of paths required
- usually stars change slowly and if $T > 1.5 \times 10^{7}\,\mathrm{K}$ so that equilibrium is established

CNO cycle

- slowest reaction: $^{14}\mathrm{N} + {}^{1}\mathrm{H}$ controls the overall energy production (bottleneck reaction)
- all CNO nuclei will be transformed to $^{14}\mathrm{N}$
- energy gain of the CNO cycle: $24.97\,\mathrm{MeV}$

helium burning

- gradual fusion of ^{4}He to ^{12}C, ^{16}O etc.
- requires temperatures $T_8 \geq 1$
- first and key reaction: 3 ^{4}He to ^{12}C: the *triple* α *process*
- proceeds in 2 steps

$$^4\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He} \leftrightarrow {}^8\mathrm{Be}$$

$$^8\mathrm{Be} + {}^4\mathrm{He} \leftrightarrow {}^{12}\mathrm{C} + \gamma$$

helium burning

- first reaction: ^{8}Be is $\approx 100\,\mathrm{keV}$ above ground state $\rightarrow$ can decay back with a lifetime of $\approx 10^{-16}\,$s
- about 10^{5} times the duration of a normal encounter (long enough to build up ^{8}Be to 10^{-9})
- therefore another reaction can occur during the lifetime
- high densities produce enough α captures to produce ^{12}C
- energy released per ^{12}C: $7.275\,\mathrm{MeV}$
- per unit mass, this is 0.1 times the energy production of the CNO cycle
- very T sensitive: $T_8 = 1 \ldots 2 \rightarrow \nu \approx 40 \ldots 19$

helium burning

- with enough ^{12}C around, further α captures can occur simultaneously:

$$^{12}\mathrm{C} + {}^{4}\mathrm{He} \rightarrow {}^{16}\mathrm{O} + \gamma$$

$$^{16}\mathrm{O} + {}^{4}\mathrm{He} \rightarrow {}^{20}\mathrm{Ne} + \gamma$$

- going beyond ^{20}Ne in this way is rare in normal stars
- energy release for $^{12}\mathrm{C}(\alpha, \gamma)^{16}\mathrm{O}$ is $7.162\,\mathrm{MeV}$
- $^{16}\mathrm{O}(\alpha, \gamma)^{20}\mathrm{Ne}$ releases $4.73\,\mathrm{MeV}$
- during He burning these reactions occur simultaneously

carbon burning

- He burning leaves mostly ^{12}C and ^{16}O
- C burning will set in for $T_8 \approx 5 \dots 10$
- reactions become quickly highly complex and only estimated reaction rates are available
- first problem: initial reaction $^{12}\mathrm{C} + {}^{12}\mathrm{C}$ produces an excited ^{24}Mg nucleus that has a number of channels for decay:

$$
{}^{12}\mathrm{C} + {}^{12}\mathrm{C} \rightarrow \begin{array}{ll}
{}^{24}\mathrm{Mg} + \gamma, & (13.931\,\mathrm{MeV}) \\
{}^{23}\mathrm{Mg} + n, & (-2.605\,\mathrm{MeV}) \\
{}^{23}\mathrm{Na} + p, & (2.238\,\mathrm{MeV}) \\
{}^{20}\mathrm{Ne} + \alpha, & (4.616\,\mathrm{MeV}) \\
{}^{16}\mathrm{O} + 2\alpha, & (-0.114\,\mathrm{MeV})
\end{array}
$$

oxygen burning

- $^{16}\mathsf{O} + {}^{16}\mathsf{O}$ requires $T_9 > 1$
- several channels:

$$^{16}\mathsf{O} + {}^{16}\mathsf{O} \rightarrow \begin{array}{ll} ^{32}\mathsf{S} + \gamma, & (16.541\,\mathrm{MeV}) \\ ^{31}\mathsf{P} + p, & (7.677\,\mathrm{MeV}) \\ ^{31}\mathsf{S} + n, & (1.453\,\mathrm{MeV}) \\ ^{28}\mathsf{Si} + \alpha, & (9.593\,\mathrm{MeV}) \\ ^{24}\mathsf{Mg} + 2\alpha, & (-0.393\,\mathrm{MeV}) \end{array}$$

- Si-burning → Fe
- end-of-the-line...